

Teorema dell'ordine.

Una curva algebrica $\tilde{V}(F)$ in $\mathbb{P}^2$ ed una retta $\ell \in \mathbb{P}^2$ si intersecano esattamente $d = \deg F$ punti oppure
 $\ell_0 \in \mathbb{P}^2$ (ed in tal caso $\ell_0 = \tilde{V}(G)$ e $G \mid F$).
 $\deg G = 1$
 κ divide

Teorema di Bézout: Siano $\tilde{V}(F)$ e $\tilde{V}(G)$ due curve algebriche di ordine rispettivamente m ed n prive di componenti comuni $\Rightarrow$
 $|\tilde{V}(F) \cap \tilde{V}(G)| = mn.$

* cioè tali che non $\exists H$ con $\tilde{V}(H) \subseteq \tilde{V}(F) \cap \tilde{V}(G).$
 $\deg H \geq 1$



$$EG_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{P}^2\mathbb{R} \subseteq \mathbb{P}^2\mathbb{C}$$

$\downarrow$
 punti propri di $\mathbb{P}^2\mathbb{R} \rightarrow$ punti propri e reali di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$.

CIRCONFERENZA: luogo dei punti a distanza $d > 0$ da un punto $C = (x_c, y_c)$ detto centro.

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = d^2$$

$\downarrow$

$$a_n \neq 0$$

$$a_n x^2 + 2a_{n3}x + \frac{1}{2}a_{11}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{11}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

eq. di una circonferenza generalizzata.

CIRCONFERENZA
'VERA'

$$x^2 + 2 \frac{a_{13}}{a_{11}}x + y^2 + 2 \frac{a_{23}}{a_{11}}y + \frac{a_{33}}{a_{11}} = 0$$

$$- \frac{a_{13}}{a_{11}} = x_c$$

$$- \frac{a_{23}}{a_{11}} = y_c$$

$$\frac{a_{33}}{a_{11}} = x_c^2 + y_c^2 - d^2 = \left(\frac{a_{13}}{a_{11}} \right)^2 + \left(\frac{a_{23}}{a_{11}} \right)^2 - d^2$$

$$d^2 = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2}{a_{11}^2} - \frac{a_{33}}{a_{11}} =$$

$$= \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}a_{11}}{a_{11}^2} > 0.$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

in $\mathbb{P}^2 \mathbb{C}$

si vale la condizione di primo $a_{12}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33} > 0$

$$a_{11} \neq 0$$

e i coeff. sono tutti reali $\Rightarrow$ i punti reali di

$\tilde{V}(F)$ sono esattamente i punti di una circonferenza.

$$\text{oss. } \tilde{V}(F) \cap \tilde{V}(x_3) = V(a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + 2a_{12}x_1x_2) \cap V(x_3)$$

$$= \{ [1, i, 0], [-1, i, 0] \}.$$

sono 2 punti immaginari e coniugati).

Supponiamo sempre $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ se $a_{11} = 0 \Rightarrow$ l'equazione della circ. generalizzata diventa

$$x_3 (2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{V}(F) = \tilde{V}(x_3) \cup \tilde{V}(2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3)$$

è l'unione della retta impropria $\tilde{V}(x_3)$

all'infinito ed una retta $\tilde{V}(2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3)$

reale.

$\searrow$ se $a_{13} = a_{23} = 0 \Rightarrow$ retta impropria contata 2 volte.


$$\tilde{V}(x_3)$$

$$\tilde{V}(2a_{13}x_1 + \dots)$$

il punto improprio di $\tilde{V}(2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3)$ è $[(-a_{23}, a_{13}, 0)]$.

Supponiamo $a_{11} \neq 0$

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + 2(a_{12}x_1 + a_{23}x_2)x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

I punti impropri $x_3 = 0$ sono

$$J_0 = [(1, i, 0)]$$

$$\bar{J}_0 = [(1, -i, 0)] = [(-1, i, 0)]$$

punti ciclici
del piano
 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

OGNI CIRCONFERENZA GENERALIZZATA PASSA PER J_0 e $\bar{J}_0$

→ CASO SPECIALE $a_{12}^2 + a_{23}^2 = a_{33}a_{11}$ cioè $d = 0$

↓
in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ la circonferenza si riduce ad un
solo punto: il suo centro.

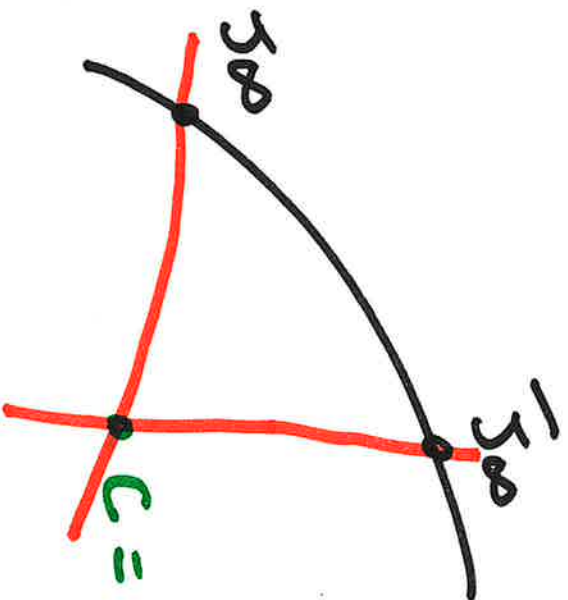
passando su $\mathbb{P}^2$, si vede che l'equazione della circonferenza si spezza e si fattorizza nel prodotto di 2 rette immaginarie e coniugate.

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + 2(a_{13}x_1 + a_{23}x_2)x_3 + \frac{(a_{13}^2 + a_{23}^2)}{a_{11}}x_3^2$$

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + 2\left(\frac{a_{13}}{a_{11}}x_1x_3 + \frac{a_{23}}{a_{11}}x_2x_3\right) + \left(\frac{a_{13}^2 + a_{23}^2}{a_{11}^2}\right)x_3^2$$

$$(x_1 + ix_2 + \frac{+ia_{23} + a_{13}}{a_{11}}x_3)(x_1 - ix_2 + \frac{-ia_{23} + a_{13}}{a_{11}}x_3) = 0$$

$$\left[-\frac{a_{13}}{a_{11}} + i\frac{a_{23}}{a_{11}} = 0 \quad i\frac{a_{23} - a_{13}}{a_{11}} \right]$$



$$J_0 C = r_0$$

$$\overline{J_0} C = r_0$$

$$\underline{045} \quad C \text{ è doppio} \rightarrow X_1^2 + X_2^2 = 0 \Rightarrow (X_1 - iX_2)(X_1 + iX_2) = 0$$

OGNI CIRCONFERENZA GENERALIZZATA DI RAGGIO $= 0$
 È UNIONE DI 2 RETTE PRE IL NOSTRO CENTRO.

TALI RETTE PASSANO PER J_0 E $\overline{J_0}$.

UNA RETTA PER J_0 O $\overline{J_0}$ È DETTA ISOLIPRA

Si on veut des points isotropes $\Rightarrow$ on a $x \pm iy + c = 0$

ALORS

1) on a

2) Soit $P, Q \in \mathbb{C} \Rightarrow d(P, Q) = 0$

vice-versa

3) Soit $P, Q \in AG_1(\mathbb{C})$ & $d(P, Q) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ les points P et Q sont isotropes.

DIM

$$1) \quad x + iy + c = 0 \rightarrow x_1 + ix_2 + cx_3 = 0 \rightarrow \overline{J_0} = [(1, -i, 0)]$$

$$(1, -i, 0) \cdot (1, -i, 0) = 1 + i^2 = 0$$

$$x - iy + c = 0 \rightarrow x_2 - ix_1 + cx_3 = 0 \rightarrow J_0 = [(1, i, 0)]$$

$$(1, i, 0) \cdot (1, i, 0) = 1 + i^2 = 0$$

$$2) \quad P = (iy_P - c, y_P) \in \pi \quad X = iy_P + c$$

$$Q = (iy_Q - c, y_Q) \in \pi$$

$$\begin{aligned} d(P, Q)^2 &= \|\vec{PQ}\|^2 = \|(iy_Q - y_P, y_Q - y_P)\|^2 = \\ &= -(y_Q - y_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$3) \quad \text{Siano } P = (x_P, y_P) \text{ e } Q = (x_Q, y_Q)$$

due punti $\Rightarrow$

$$d(P, Q)^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y_Q - y_P)^2 = -(x_Q - x_P)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_Q - x_P) = \pm i(y_Q - y_P) \Rightarrow$$

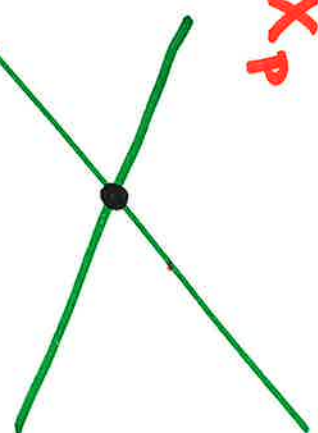
La retta per P e Q ha eq.

$$\frac{X - X_P}{X_Q - X_P} = \frac{y - y_P}{y_Q - y_P}$$

$$\frac{X - X_P}{\pm i(y_Q - y_P)} = \frac{y - y_P}{y_Q - y_P}$$

$$X = \pm i(y - y_P) + X_P$$

è una retta isocropa.



Oss. FONDAMENTALE: Una retta isocropa ha esattamente
1 punto reale!!

oss: Una retta in $\mathbb{P}^2$ è reale $\Leftrightarrow$ essa ha almeno 2 punti reali distinti.

Ogni retta di $\mathbb{P}^2$ ha almeno un punto reale.

Dim: Sia π_0 una retta di $\mathbb{P}^2$.

Supponiamo $\exists P, Q \in \pi_0$ reali $\Rightarrow P = \bar{P}$
 $Q = \bar{Q}$

$\Rightarrow \bar{PQ} = PQ = \pi_0$ ma $\bar{PQ}$ è la retta che
realtà

passa per $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ e quindi è proprio $\bar{\pi}_0$

$\Rightarrow \bar{\pi}_0 = \pi_0$.

[dim alternativa: scegliere per P e Q coordinate in $\mathbb{R}^3$
e scrivere l'equazione di π_0].

1) Sia $\pi_0 \in \mathbb{P}^2$ una retta $\Rightarrow$

se $\pi_0 = \bar{\pi}_0$ si ha π_0 reale $\Rightarrow \infty$ punti reali
altrimenti $\pi_0 \neq \bar{\pi}_0$ ma 2 rette in $\mathbb{P}^2$ si
intersecano sempre! $\Rightarrow P = \pi_0 \wedge \bar{\pi}_0 = \bar{\pi}_0 \wedge \pi_0 = \bar{P}$
Il punto di intersezione fra π_0 ed $\bar{\pi}_0$ è reale.
o

oss: Ogni retta isoclona ha esattamente un
punto reale

T.N.B è possibile definire un prodotto Hermitiano in $\mathbb{C}^n$
che è "definito positivo"

$$\beta(x, y) \rightarrow \mathbb{R} \quad \beta(x, y) = \bar{x}^T y$$

$$B(x, x) = \bar{x}^T x \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad \bar{x}^T x = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$$

$$B(x, y) = \bar{x}^T B(x, y) \neq \alpha B(x, y)$$

$$B(x, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \quad \Leftrightarrow B(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$$

$$|x\rangle \quad \langle x| \rightarrow$$

2

1

$$x^2 + y^3 = 0$$

↓

$$\begin{cases} x_3^2 x_1^2 + x_2^4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_2^4 = 0$$



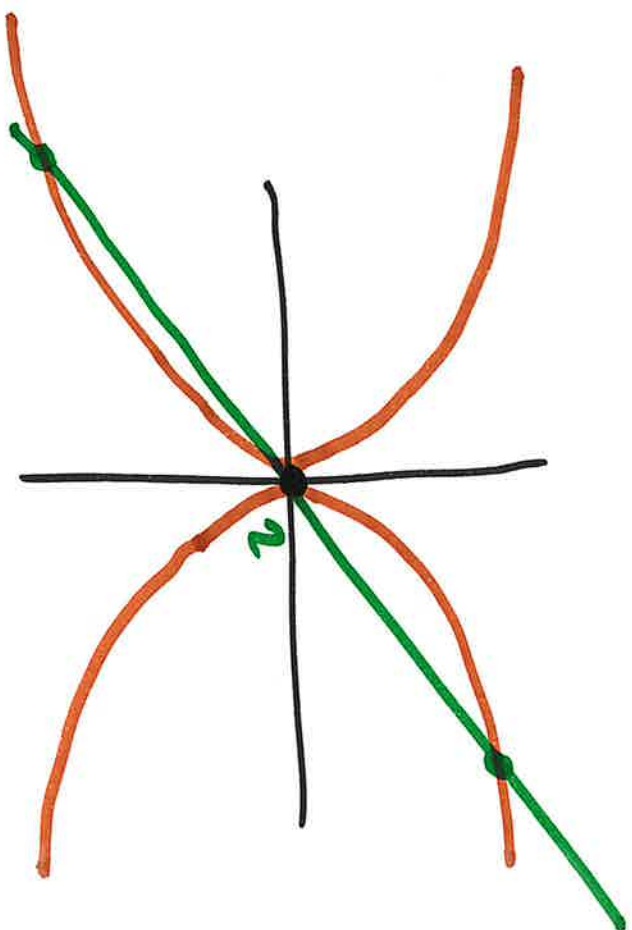
$[(1, 0, 0)]$

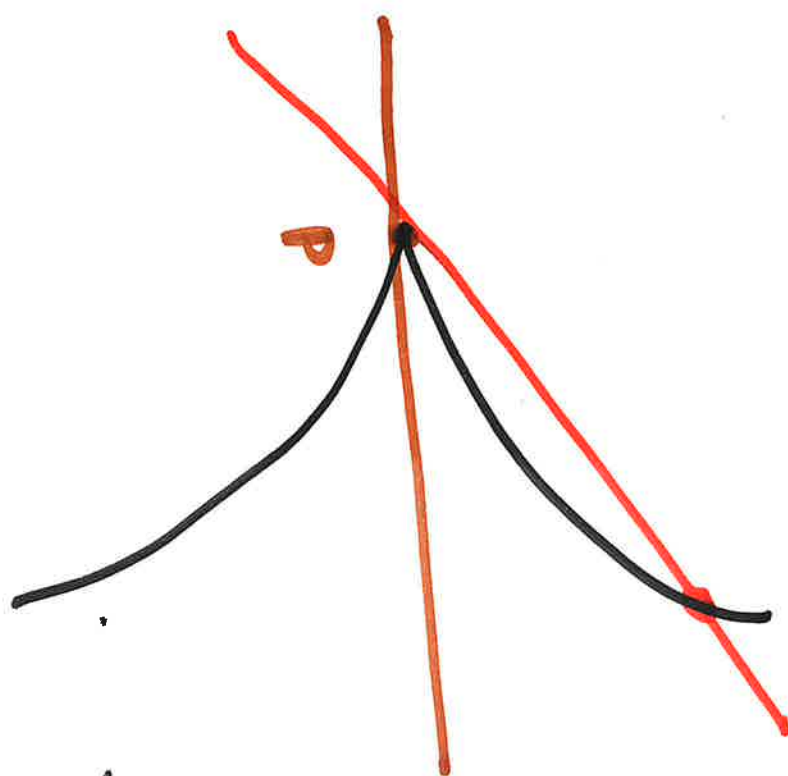
$$x^2 - y^4 = 0$$

$$x_3^2 x_1^2 - x_2^4 = 0 \quad x_2^4 = 0$$

$$(x - y^2)(x + y^2) = 0$$

$$x_2 x_3 - x_2^2 = 0 \quad [(1, 0, 0)]$$





In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ogni retta ha sempre almeno un punto reale.

1) Se ci sono 2 pt reali $\Rightarrow h_0$ è reale.

2) $\exists!$ punto reale $\begin{cases} \text{Proprio} \rightarrow \text{il coeff. angolare è} \\ \text{improprio.} & \text{in } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \end{cases}$

$\hookrightarrow$ il coeff. angolare è
in $\mathbb{R}$.

N.B. Anche nelle rette hanno sempre 0 punti

immaginari.

Es. $\forall: X=0 \quad (0,i) \in h_0$

$(0, 2+\pi i) \in h_0$

Se h_0 è reale $\Rightarrow P \in h_0 \Leftrightarrow \bar{P} \in h_0$.

"i punti immaginari "vanno in coppia" e $\hat{V}(F)$ è reale."

$$c: aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$$

$$M_{\alpha} \bar{M} : \begin{cases} aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0 \\ aX_1 + \bar{b}X_2 + \bar{c}X_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow M_K \begin{pmatrix} a & b & c \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = I$$

$\Rightarrow M$ è reale.

$$M_K \begin{pmatrix} a & b & c \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = I \Rightarrow M \text{ è invertibile.}$$

$$M_K \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix} = I \Rightarrow M_{\alpha} \bar{M} \text{ è una matrice propria.}$$

$$M_K \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix} = I \Rightarrow M_K \begin{pmatrix} a & b & c \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = I \Rightarrow M_{\alpha} \bar{M} \text{ è una matrice propria.}$$

$M/\bar{M}$

In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ la retta è espressa più facilmente.

→ per i piani: analogo a quanto succede per le rette in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$.

$$\pi: ax_2 + bx_3 + cx_n = 0.$$

Se $\pi = \bar{\pi} \Rightarrow \pi$ è una retta reale $\pi_k \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = 1$

Se $\pi \neq \bar{\pi} \Rightarrow \pi \cap \bar{\pi} = \emptyset$ retta e $\pi = \pi \cap \bar{\pi} = \bar{\pi} \cap \pi = \bar{\pi}$

Ogni piano di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ contiene almeno una retta reale.

Se uno contiene più di una retta reale $\Rightarrow$ contiene almeno 3 punti non allineati reali



$\Rightarrow \pi = \bar{\pi}$ e π è reale.

$$\pi \pi^\dagger = I_0 \quad (\pi \text{ unitario}) \Leftrightarrow$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = 1$$

Due possibilità 1) $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = 1$ $\det \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = 1$

$$\Rightarrow \pi \pi^\dagger = I_0 \text{ è una matrice di Pauli}$$

impropri $\Rightarrow$ è la giacitura di π

$$\Rightarrow \pi // \pi^\dagger \text{ e } \pi \text{ non ha propietà reali}$$

reali

$$[X, X] = 0$$

$$2) \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow \pi \pi^\dagger \text{ è una matrice}$$

propria reale e

3! punto improprio reale
di π .

Oss: In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ due rette immaginarie e coniugate
possono essere sghembe!

↓
vivono in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ rette prive di punti
reali.

↓
vivono in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ rette che non sono
contenute in alcun piano reale.

Studiamo $\pi_0 \cap \bar{\pi}_0$.

$$\pi_0 := \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ \text{Im} + i\text{Re} \\ ax_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \mu & \mu_k \\ \mu_k \end{matrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{cases} \bar{a}x_2 + \bar{b}x_3 + \bar{c}x_4 + \bar{d}x_5 = 0 \\ \bar{a}'x_2 + \bar{b}'x_3 + \bar{c}'x_4 + \bar{d}'x_5 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \bar{\mu} & \mu_k \\ \mu_k \end{matrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \\ \bar{a}' & \bar{b}' & \bar{c}' & \bar{d}' \end{pmatrix} = 2$$

$$A|B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \hline \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \\ \bar{a}' & \bar{b}' & \bar{c}' & \bar{d}' \end{bmatrix}$$

$A \quad B$

$\pi_K(A)$	$\pi_K(A B)$	
π reale	2	$\pi_0 = \bar{\pi}$
π è immaginario	3	$\pi // \bar{\pi}$
di I specie	3	$\pi \wedge \bar{\pi} = \{P\}$
π è immaginario	3	$\pi \wedge \bar{\pi} = P$
di II specie.	4	$\pi \wedge \bar{\pi} = \emptyset$

π_0 imm. di I sp. $\Leftrightarrow \pi_0$ è complanare con $\bar{\pi}_0$ ma $\pi_0 \neq \bar{\pi}_0$

π_0 imm. di II sp. $\Leftrightarrow \pi_0$ è sghembo rispetto $\bar{\pi}_0$.

Esercizio: data π_0 di I sp. trovare il primo reale che la contiene.

$$u: 3x+5y-7 = 2ix+7y-3i = 0$$

↓

$$\bar{u}: 3x+5y-7=0$$

$$v: 3x+2iy-5 = 3x-2iy+7 = 0$$

$$6x+2=0$$

$$u: (ax+by+c) = (a'x+b'y+c') = 0$$

$$\pi_{u,v} d(ax+by+c) + p(a'x+b'y+c') = 0$$

$$d=1$$

$$\overline{\pi}_{u,v} \overline{d}(\overline{a}x+\overline{b}y+\overline{c}) + \overline{p}(\overline{a}'x+\overline{b}'y+\overline{c}') = 0$$

$$E_k \begin{bmatrix} a + \beta a' & b + \beta b' & c + \beta c' & d + \beta d' \\ \bar{a} + \bar{\beta} \bar{a}' & \bar{b} + \bar{\beta} \bar{b}' & \bar{c} + \bar{\beta} \bar{c}' & \bar{d} + \bar{\beta} \bar{d}' \end{bmatrix} = I$$

$$\Leftrightarrow \pi_{\alpha, \beta} = \bar{\pi}_{\alpha, \beta}$$

$\Leftrightarrow \pi_{\alpha, \beta}$ est réelle.

$$\begin{aligned} \beta &= x + iy \\ \bar{\beta} &= x - iy \end{aligned}$$

$$H \cap \bar{H}$$

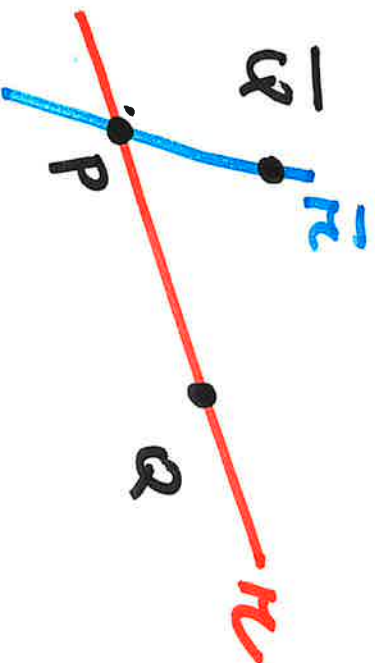
$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \\ \bar{a}' & \bar{b}' & \bar{c}' & \bar{d}' \end{bmatrix} = A$$

Se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow H$ est invm. de Π sp. $\Rightarrow$ mou
 $\exists \pi$ qui contient H réelle.

Se $\det(A) = 0 \Rightarrow \pi$ è inv. di I opac.

$\Rightarrow$ consideriamo

$P = \pi \cap \bar{\pi}$ e sia $Q \in \pi$ con $Q \neq P$



I re perhi P, Q e $\bar{Q}$ non sono allineati

perché $P = \pi \cap \bar{\pi}$ e se fosse $\bar{Q} \in \pi \Rightarrow$

$\bar{Q} \in \bar{\pi} \cap \pi$ ma $\pi \neq \bar{\pi}$ e $Q \neq P$ dunque assurdo.

Il primo n. de per π avrà l'unico primo che contiene

$$P, Q \in \bar{Q}.$$

dunque se

$$P \in \mathcal{X}_P$$

$$P = (x_1' \ x_2' \ x_3' \ x_4')$$

$$Q = (x_1'' \ x_2'' \ x_3'' \ x_4'')$$

$\Rightarrow \pi$ ha equazioni

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ \bar{x}_1'' & \bar{x}_2'' & \bar{x}_3'' & \bar{x}_4'' \end{pmatrix} = 0$$

- Luogo dei punti equidistanti da 2 punti dati:

$$d=1$$



ASSE DI UN SEGMENTO.

- Luogo dei punti a distanza assegnata da un punto.

$$d=2$$



- Luogo dei punti a distanza assegnata da una retta.

$$d=2$$

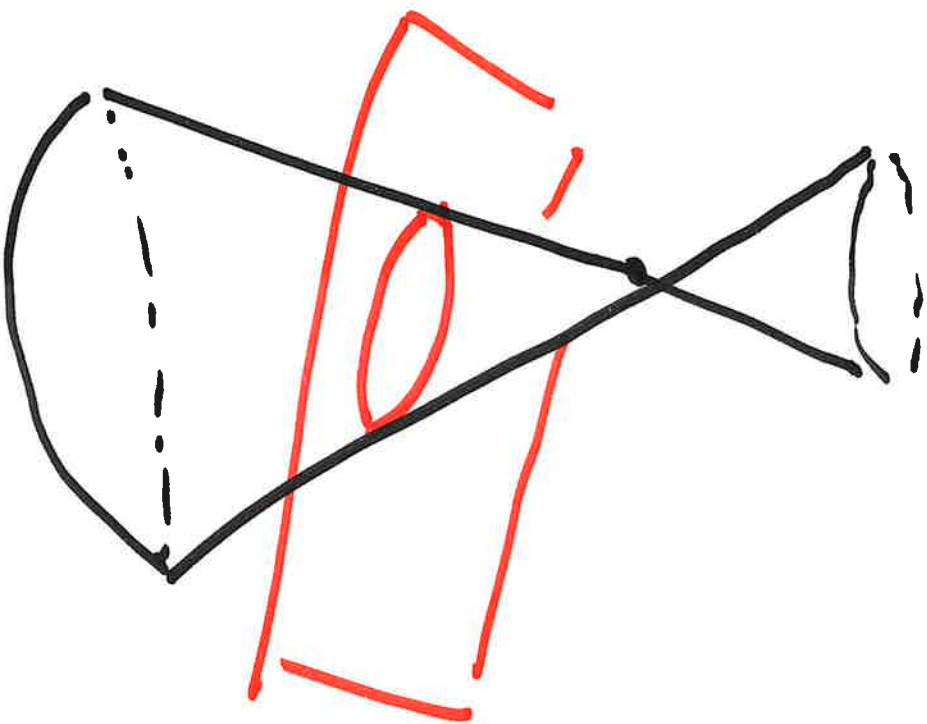


$$ax + by + c = 0$$

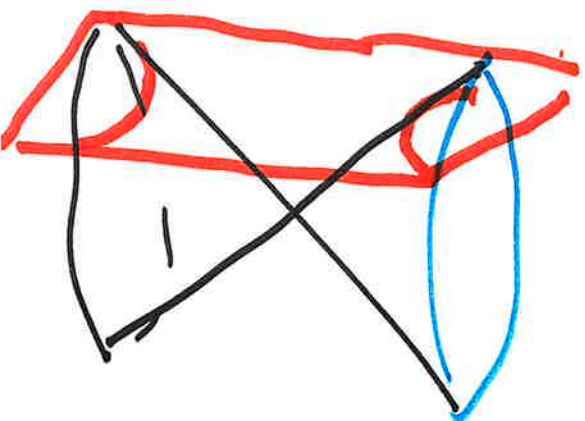
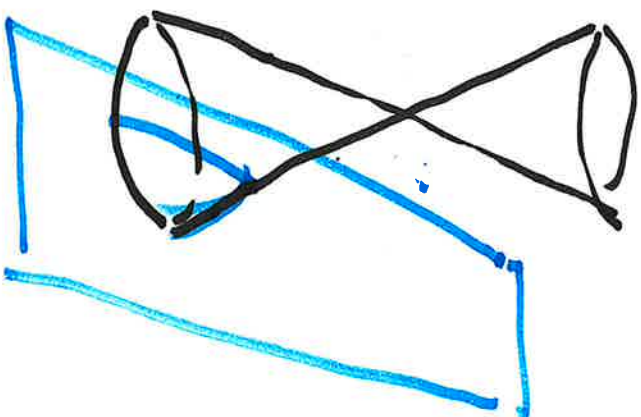
$$ax + by + c' = 0$$

$$(ax + by + c)(ax + by + c') = 0$$

cono è descritto da
 una eq. di II grado
 in $\mathbb{P}^3 \mathbb{C}$.



1



In termini metrici possiamo descrivere la conica mediante eq. di Π grado.

→ Sia F_1, F_2 due punti.

• Si dice ellipse il luogo dei punti la cui somma delle distanze da F_1 ed F_2 è pari a dato

• Si dice iperbole il luogo dei punti la cui differenza delle distanze da F_1 e F_2 è pari a dato.